

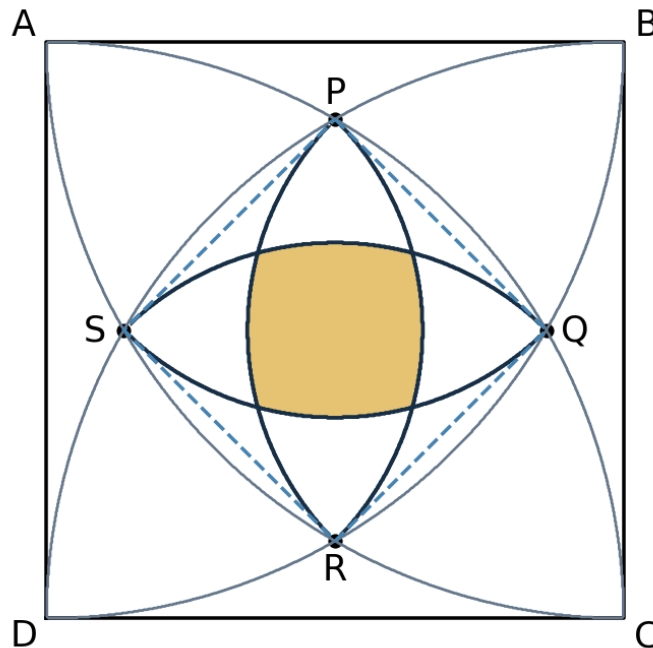
円弧で囲まれた面積の解説

小学生向け ルートを使わない解き方

目標は、まん中の小さな斜線部分の面積を求めることです。半径の長さを求めず、正三角形・扇形・正方形の面積と、図形の拡大縮小を使います。

円周率 3.14 と高さ 8.7cm を使う本書の手順では、答えは約 8.40cm^2 です。8.7cm は丸めた値なので、この答えも近似です。

1 円弧を描く順番を確認する



① 大きな正方形 ABCD の一辺は 10cm。A・B・C・D を中心に、半径 10cm の円弧を描きます。

② その円弧の交点を、上から時計回りに P・Q・R・S とします。点線で結ぶと、小さな正方形 PQRS ができます。

③ P・Q・R・S を中心に、隣り合う点までの距離を半径として、もう一組の円弧を描きます。その 4 つの円に共通する部分が斜線部分です。

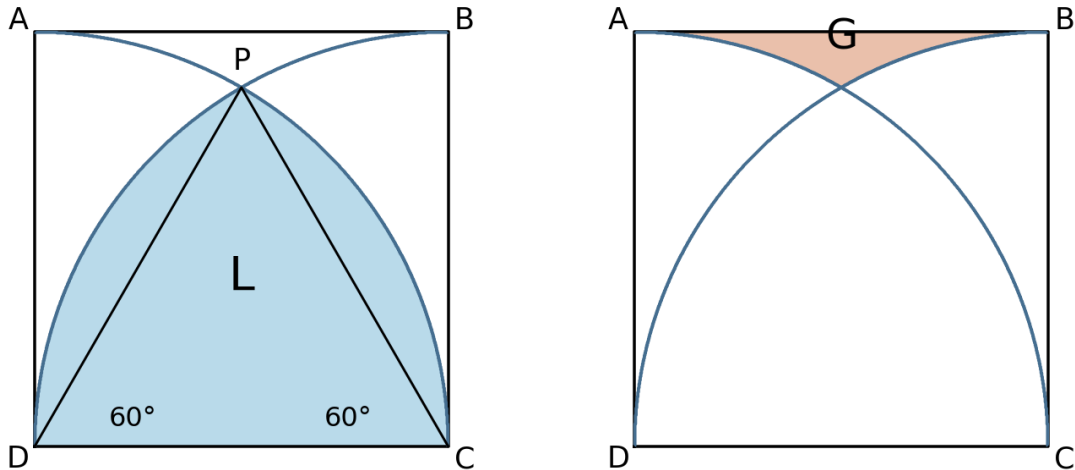
元の問題文には③の説明がありません。この解説では、ご説明いただいた③の条件を加えた図を扱います。

2 まず大きな図形で面積を求める

いったん内側の円弧を外し、A・B・C・D を中心にした4つの円に共通する、大きな中央部分を考えます。その面積をUとします。最後にUを縮小して、斜線部分を求めます。

正三角形と扇形を見つける

下の2点DとCを中心にした円弧の上側の交点がPです。DC・DP・CPはすべて10cmなので、三角形DCPは正三角形です。角は60度、高さは指定された8.7cmを使います。



左図の青い部分Lは、下の2つの四分の一円が重なる部分です。Dを中心とする60度の扇形と、Cを中心とする60度の扇形を足すと、三角形DCPだけ二重に数えます。そこで三角形1個分を引きます。

$$\text{正三角形の面積} = 10 \times 8.7 \div 2 = 43.5 \text{ cm}^2$$

$$L = 10 \times 10 \times 3.14 \div 6 \times 2 - 43.5$$

$$= 314 \div 3 - 43.5 \text{ cm}^2$$

2つの円のどちらにも入らない部分を求める

四分の一円1個の面積は78.5cm²です。2個を足して、重なりLを1回引けば、少なくともどちらかの円に入る部分になります。正方形からそれを引いた、右図のオレンジ色の部分をGとします。

$$\text{四分の一円} = 10 \times 10 \times 3.14 \div 4 = 78.5 \text{ cm}^2$$

$$G = 100 - (78.5 \times 2 - L)$$

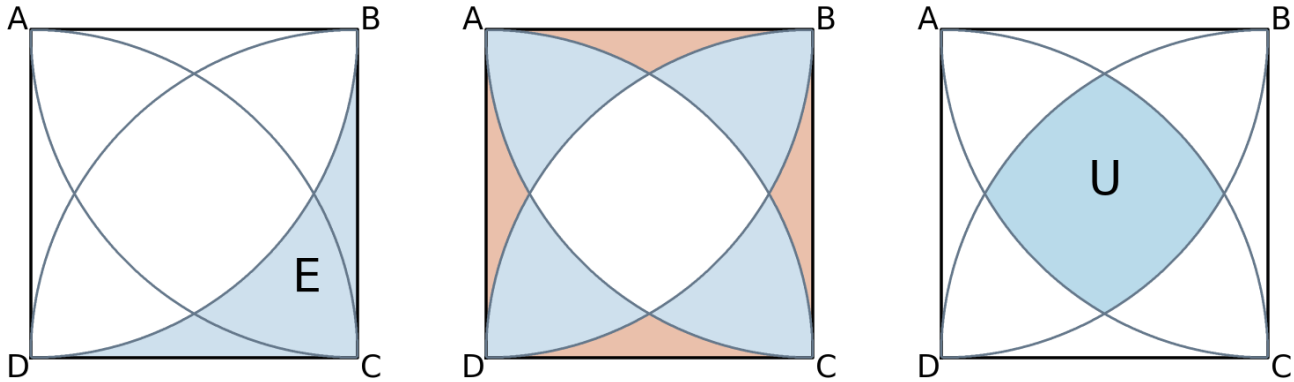
$$= L - 57 = 314 \div 3 - 100.5 \text{ cm}^2$$

3で割ると小数が続くため、途中では「314÷3」のまま残します。ルートではなく、普通の割り算です。

3 引きすぎた面積を戻す

1つの円に入らない部分をEとします。左図はAを中心にした円の場合です。

$$E = \text{正方形} - \text{四分の一円} = 100 - 78.5 = 21.5 \text{ cm}^2$$



4つの中心について、それぞれEを引けば、すべての円に入る中央部分だけが残ります。しかし、中央図のオレンジ色の部分は、2つのEに重なっているため、2回引いてしまいます。

そこは1回だけ引けばよいので、1回分を戻します。オレンジ色の部分は、前ページで求めたGと同じ形で、上下左右に4つあります。これらの重なり部分どうしは重なっていません。

$$\begin{aligned} U &= \text{正方形} - E \times 4 + G \times 4 \\ &= 100 - 21.5 \times 4 + (314 \div 3 - 100.5) \times 4 \\ &= 14 + 1256 \div 3 - 402 \\ &= 92 \div 3 \text{ cm}^2 \quad (\text{約 } 30.67 \text{ cm}^2) \end{aligned}$$

どの部分を計算したか確認する

約 30.67 cm^2 は、右図の青い大きな中央部分Uの面積です。最終的に求めたい小さな斜線部分の面積ではありません。次のページで、これを小さな正方形の大きさに縮小します。

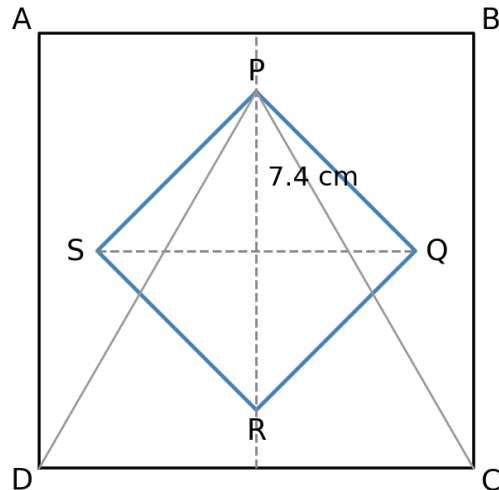
面積の足し引きの意味

円の外にある部分を4回分取り除き、二重に取り除いた分だけ戻しました。青色やオレンジ色は、数える回数を確認するための目印です。円弧の長さを計算する必要はありません。

4 小さな正方形の面積で縮小する

三角形 DCP の高さが 8.7cm なので、P は下の辺から 8.7cm の位置にあります。上下対称な R は、下の辺から $10 - 8.7 = 1.3\text{cm}$ の位置にあります。

$$\text{対角線 } PR = 8.7 - 1.3 = 7.4\text{ cm}$$



もう 1 本の対角線 QS も 7.4cm です。正方形はひし形でもあるので、対角線どうしをかけて 2 で割ると面積が求められます。対角線で分けた 4 つの直角三角形の面積を足しても同じです。

$$\text{正方形 PQRS の面積} = 7.4 \times 7.4 \div 2 = 27.38\text{ cm}^2$$

大きな正方形では「各頂点を中心に、一辺を半径とする円弧」を描きました。小さな正方形でも同じ描き方です。したがって、大きな中央部分 U と小さな斜線部分は、向きを変えて縮めると重なります。

図形を同じ割合で縮めると、正方形も、その中の曲線で囲まれた部分も、面積が同じ割合で小さくなります。

$$\text{面積の割合} = 27.38 \div 100 = 0.2738$$

$$\text{斜線部分} = (92 \div 3) \times 0.2738$$

$$= 8.396533\ldots\text{ cm}^2$$

$$\text{答え 約 } 8.40\text{ cm}^2$$

5 ルートが不要な理由と近似の注意

半径ではなく半径と半径の積が必要

内側の円弧の半径は、小さな正方形の一辺です。一辺の長さそのものを正確に表そうとすると、ルートが出てきます。ところが面積の計算では、一辺の長さを取り出す必要がありません。

$$\begin{aligned}\text{半径} \times \text{半径} &= \text{小さな正方形の面積} \\ &= \text{対角線} \times \text{対角線} \div 2\end{aligned}$$

この問題では「半径×半径」を 27.38 と計算できました。また、最後は面積の割合で縮めたので、内側の半径や、内側にできる正三角形の高さも求めずに済みました。

使った計算は、たし算・引き算・かけ算・わり算だけです。ルート2の近似値を教えてもらう必要はありません。

8.7cm を使う答えと以前の 8.43cm²の違い

8.7cm は、正三角形の本当の高さを小数第1位に丸めた値です。そのため、本書では長さ・面積ともに近似計算になっています。途中の式で「=」を使っているのは、指定値を入れた計算としての等号です。

本書の手順で高さ 8.7cm と円周率 3.14 を使うと約 8.40cm²です。高さを丸めず、円周率だけ 3.14 にすると約 8.43cm²です。さらに円周率も丸めなければ約 8.44cm²です。

8.7cm という粗い近似値を途中に入れるので、厳密には同じ式でも、式の変形や代入する場所によって近似結果がずれることがあります。小数第2位までの値を、図形の厳密な面積として扱わないことが大切です。

教える方への補足

この問題で確かめたいのは、半径の長さを求めなくても面積が計算できることです。解答には「高さ 8.7cm を使った近似計算」と明記し、約 8.4cm²と捉えるとよいでしょう。元の問題文には、内側の円弧の中心と半径についての説明を補う必要があります。

計算の順序は、大きな中央部分 U を求める → 小さな正方形の面積を求める → 面積の割合で U を縮小する、です。